



IME-USP

Renormalização em Dinâmica Unidimensional

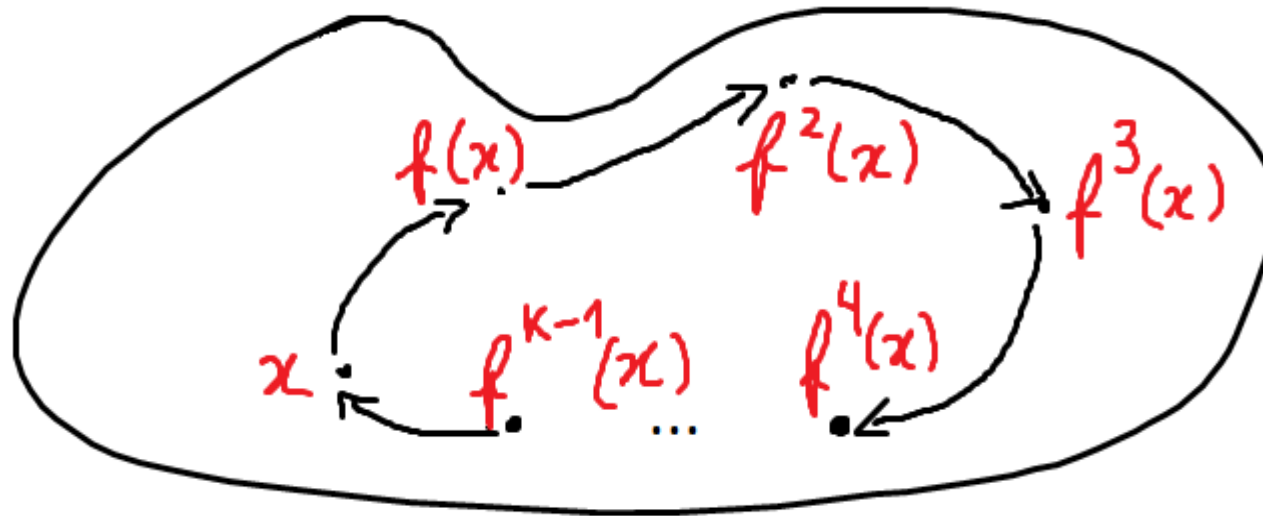
Aluno: Danilo Rodrigues de Lima

Orientador: Edson Vargas

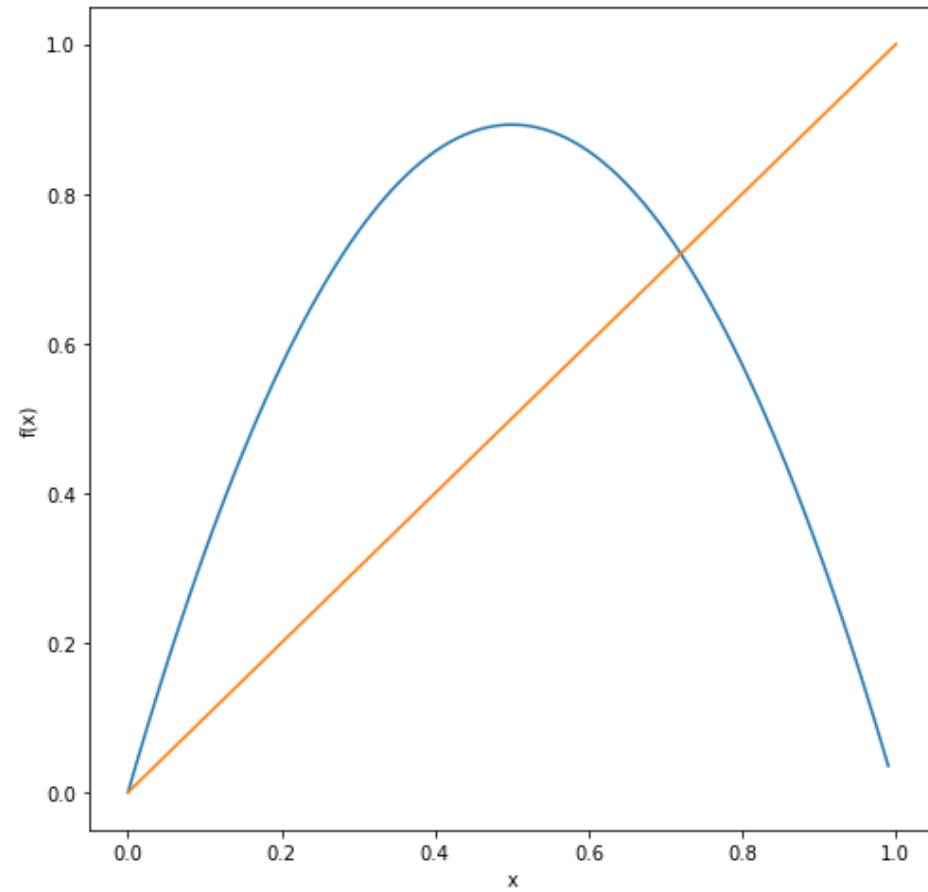
MAT0148 - Introdução ao Trabalho Científico

O que é um Sistemas Dinâmico?

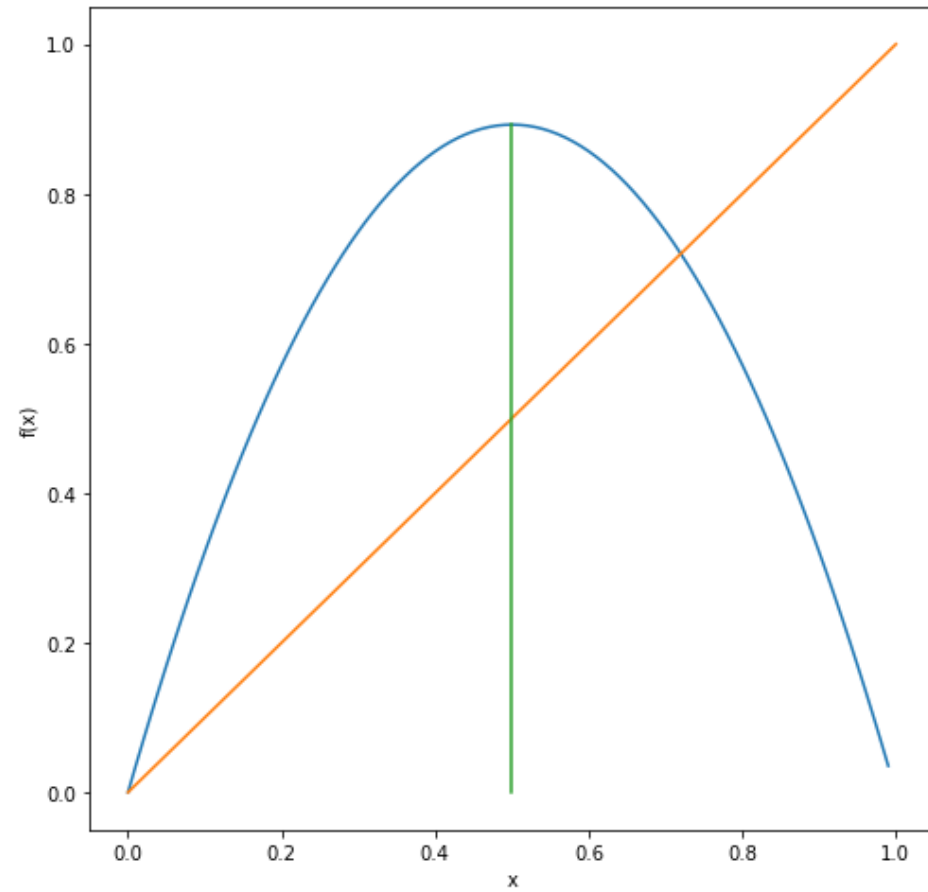
- Um conjunto X + uma função $f: X \rightarrow X$
- **Órbita** de x : sequência $x, f(x), f(f(x)) = f^2(x), \dots$ para $x \in X$
- x é **periódico de período k** se $f^k(x) = x$, com k mínimo
- Se $k = 1$, x é dito **ponto fixo**



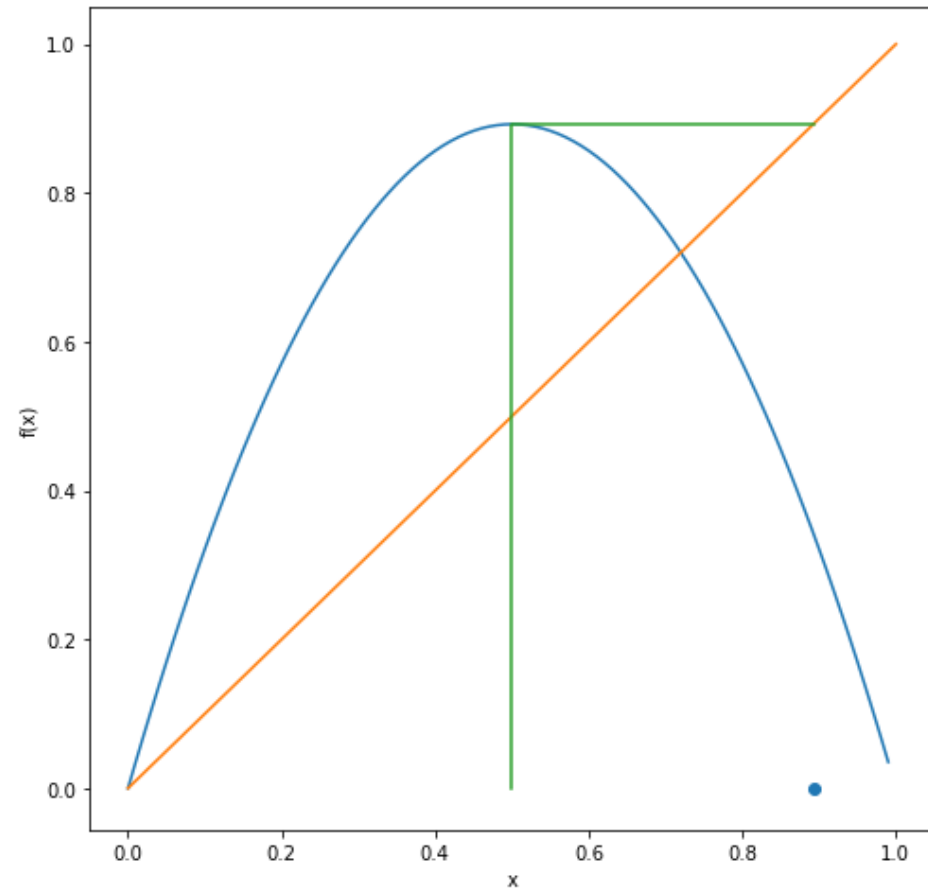
Mapas Unimodais



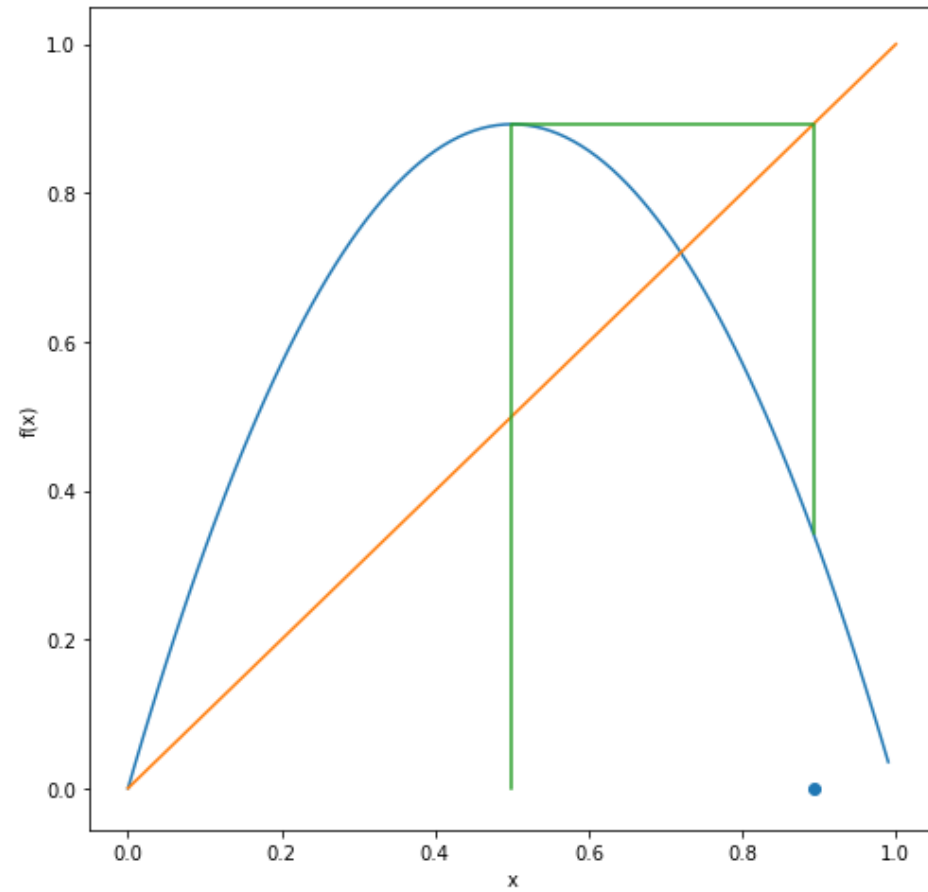
Mapas Unimodais



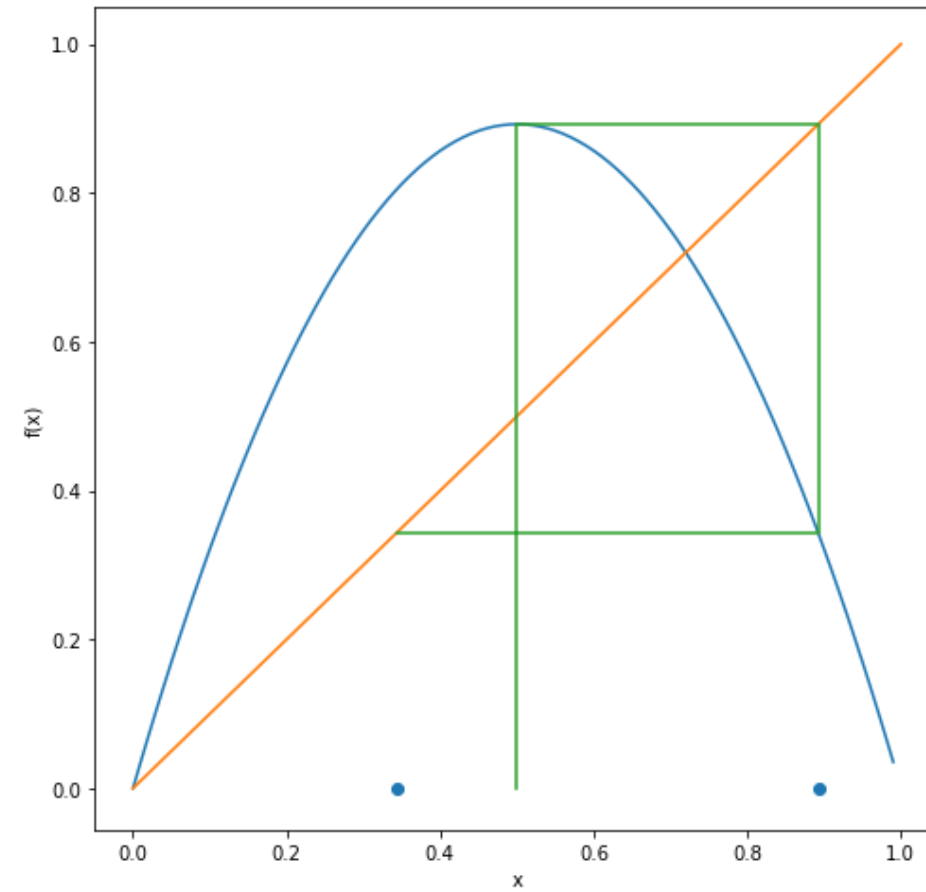
Mapas Unimodais



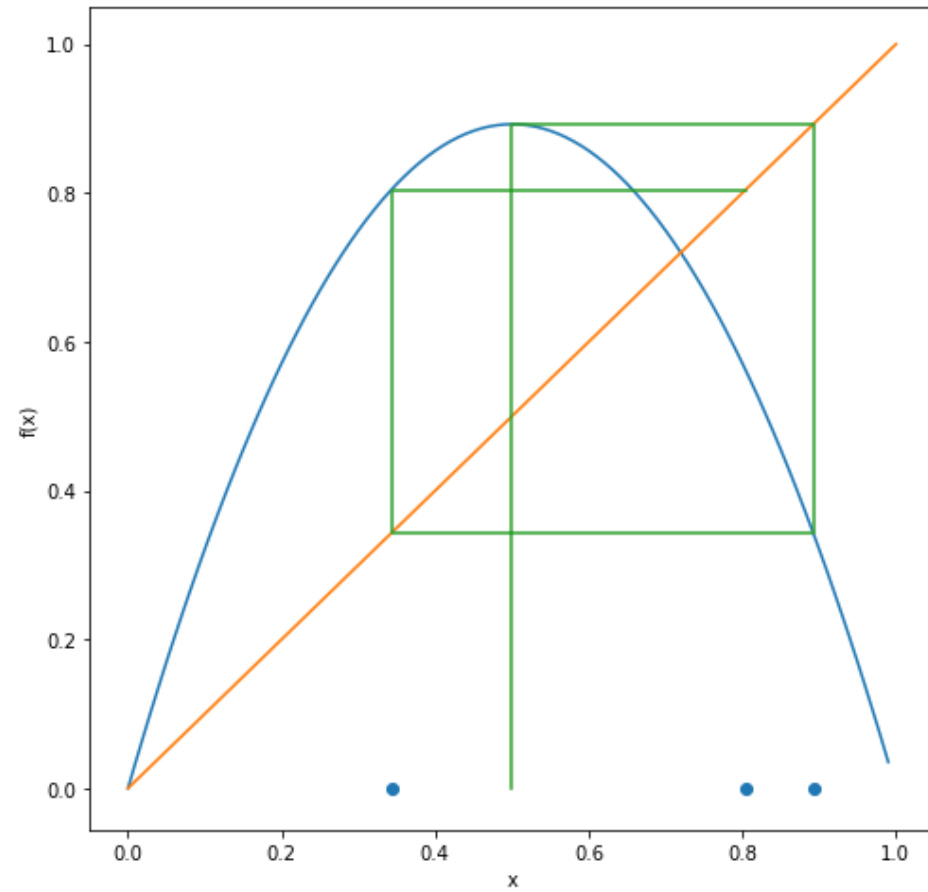
Mapas Unimodais



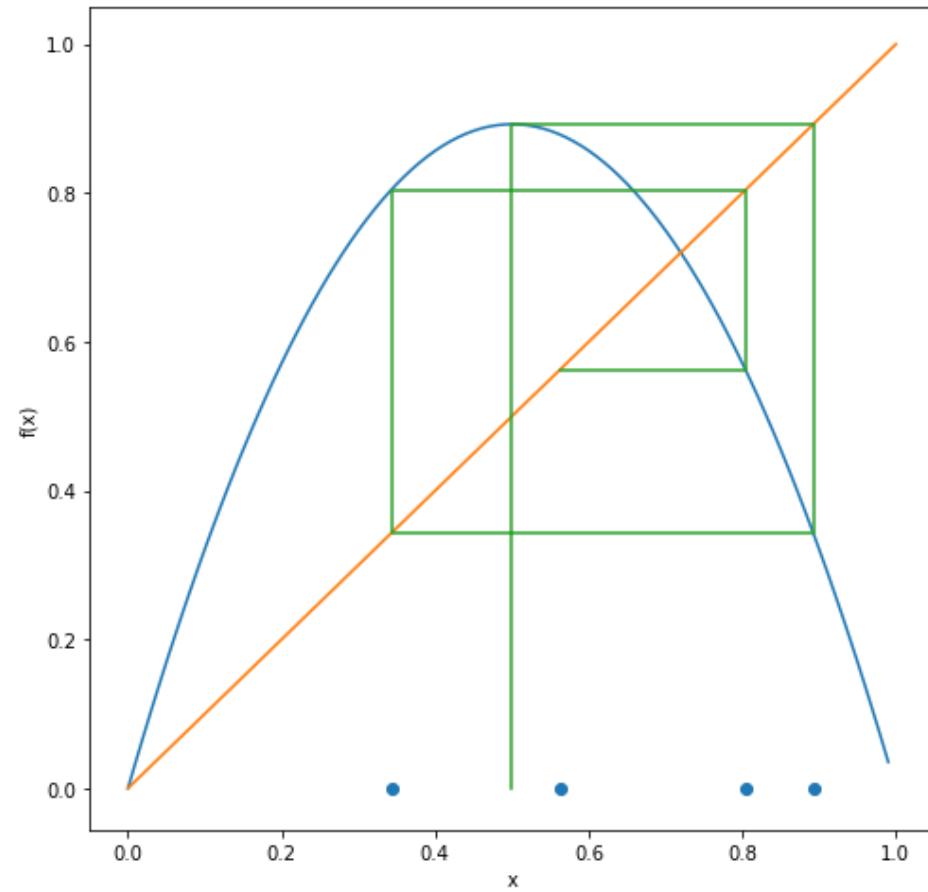
Mapas Unimodais



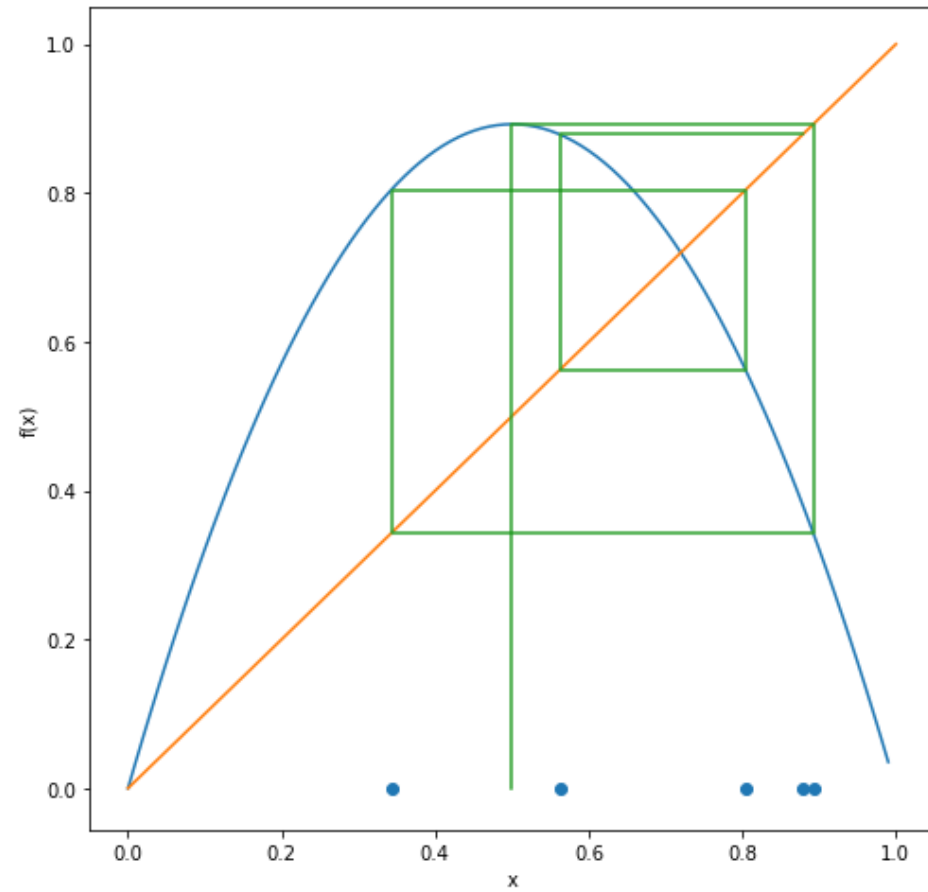
Mapas Unimodais



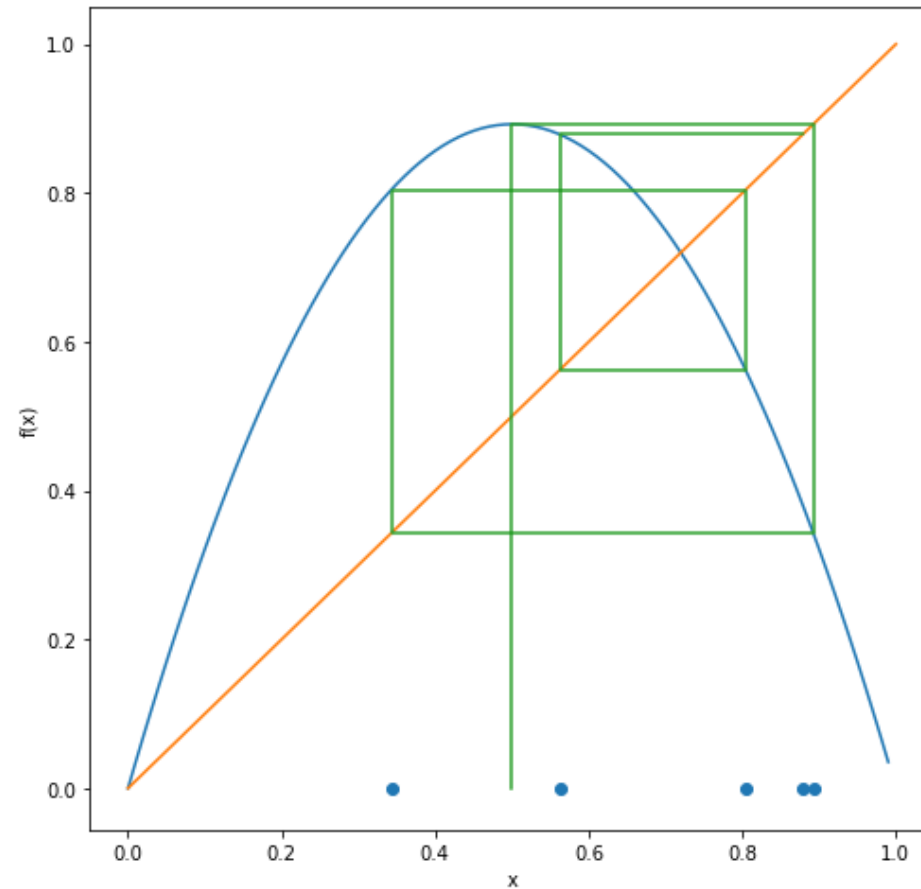
Mapas Unimodais



Mapas Unimodais

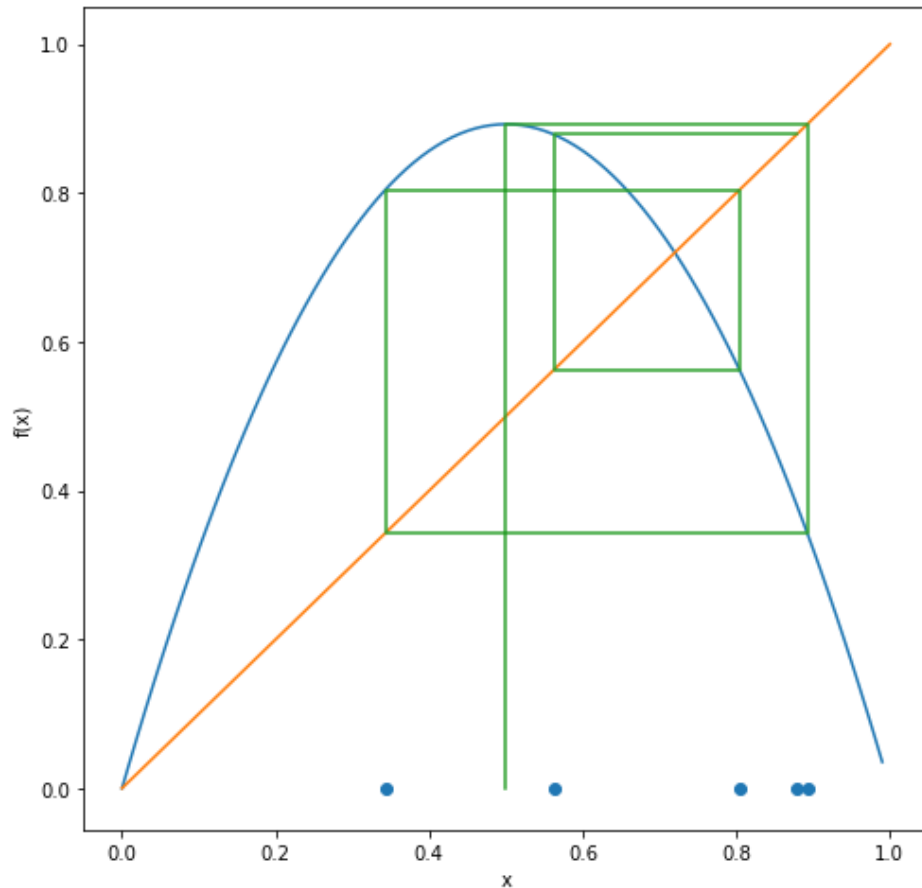


Mapas Unimodais



E assim por diante ...

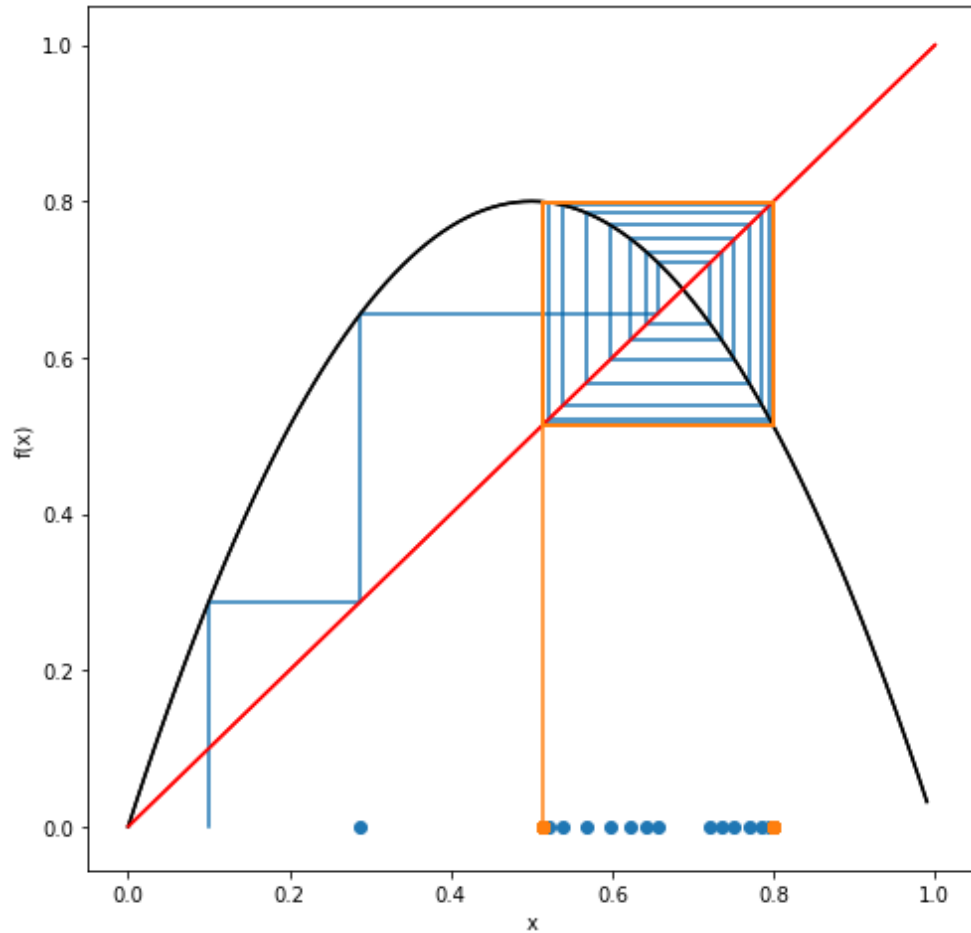
Mapas Unimodais



E assim por diante ...

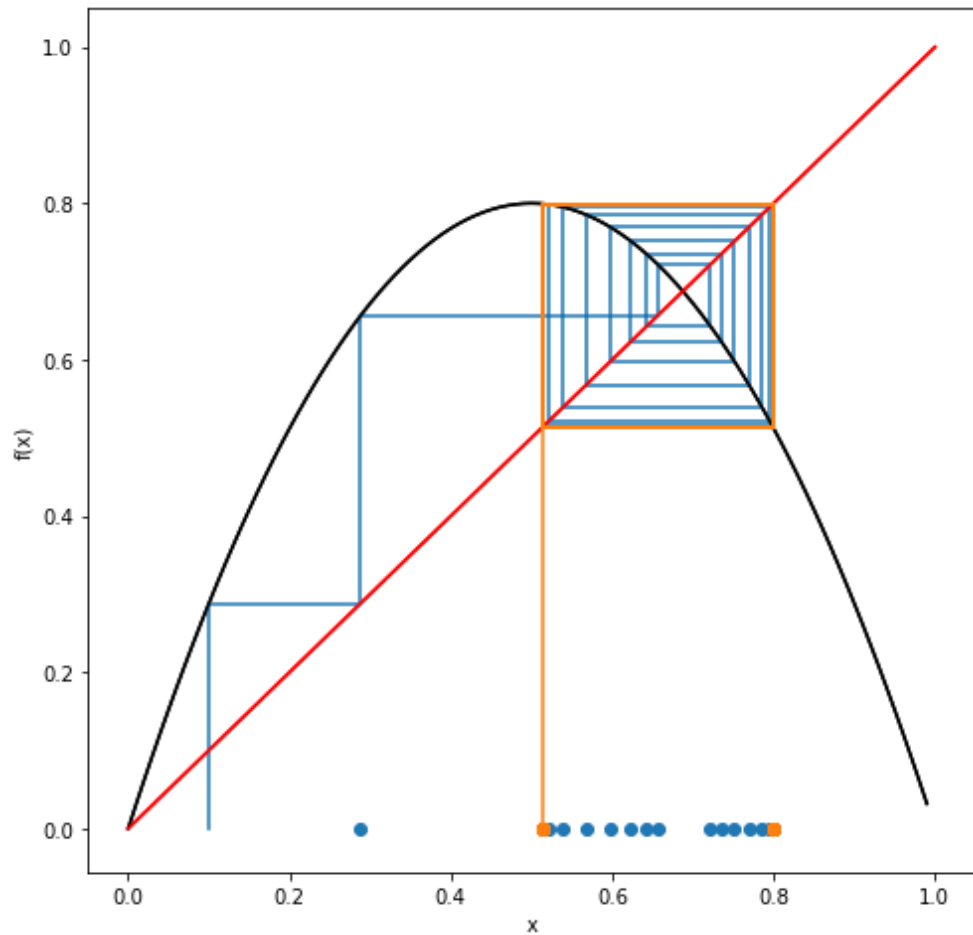
Dizemos que um ponto x de período k é **atrator** se o conjunto de pontos atraídos a sua órbita tem interior não vazio. Tal conjunto é chamado **bacia de atração**.

Mapas Unimodais



Dizemos que um ponto x de período k é **atrator** se o conjunto de pontos atraídos a sua órbita tem interior não vazio. Tal conjunto é chamado **bacia de atração**.

Mapas Unimodais



Mais geralmente...

Conjunto ω -limite:

$$\omega(x) = \{y: \forall(\varepsilon, N), \exists n \geq N \text{ tal que } |f^n(x) - y| < \varepsilon\}$$

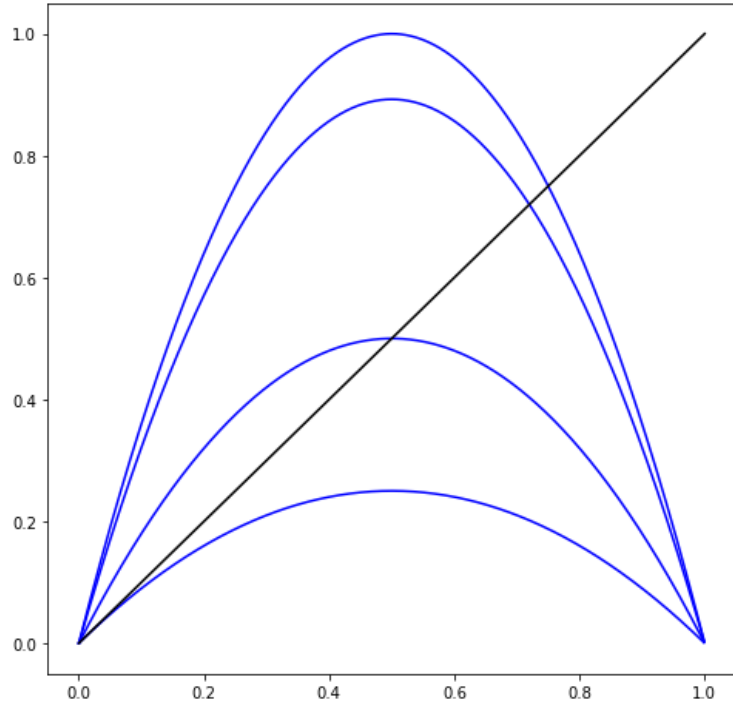
Bacia de um invariante A :

$$B(A) = \{x: \omega(x) \subseteq A\}$$

Atrator: Conjunto invariante minimal com uma bacia “*grande*”.

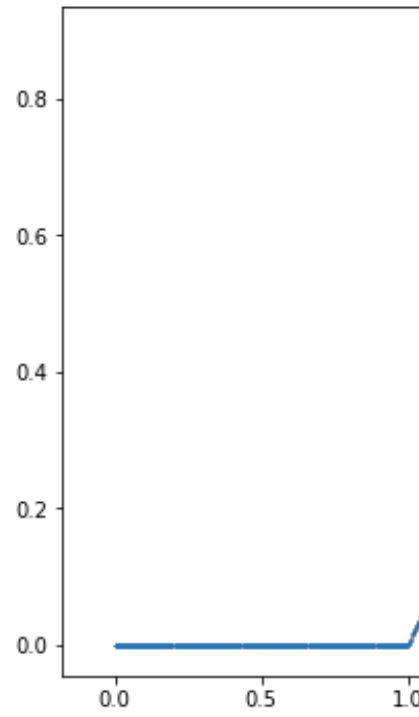
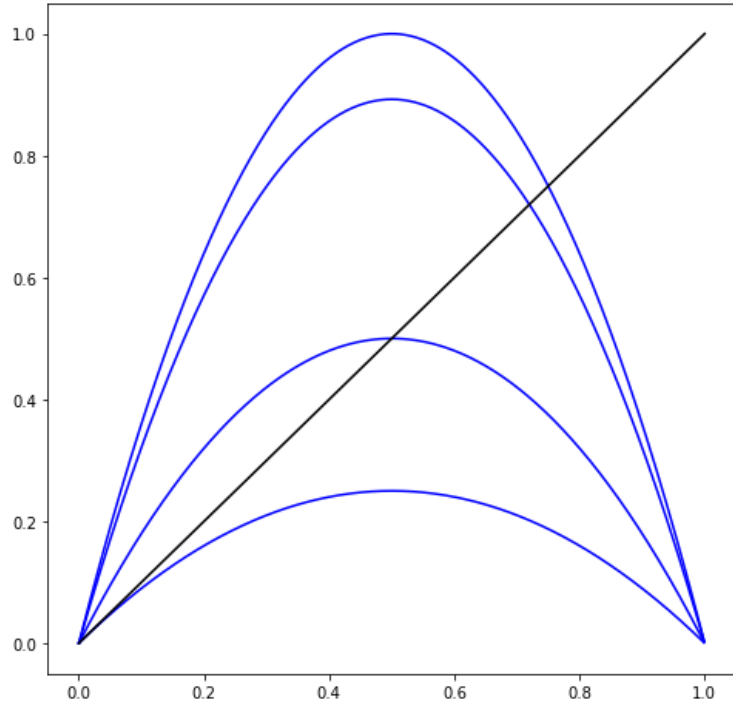
Família Logística

- $f_a(x) = ax(1 - x)$, $0 < a \leq 4$



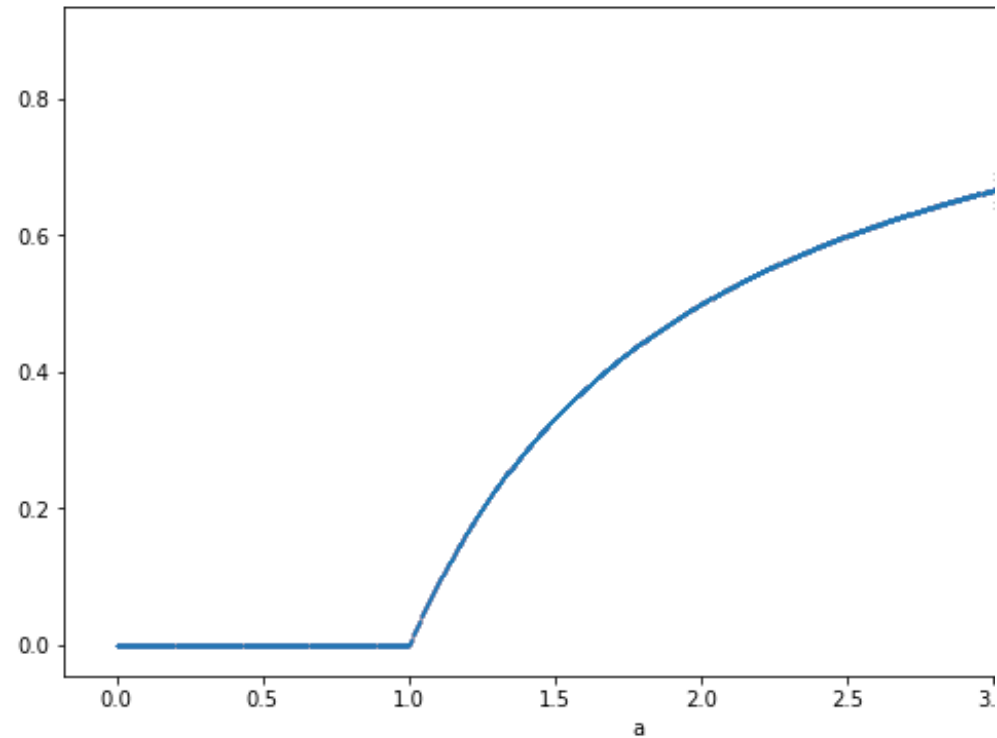
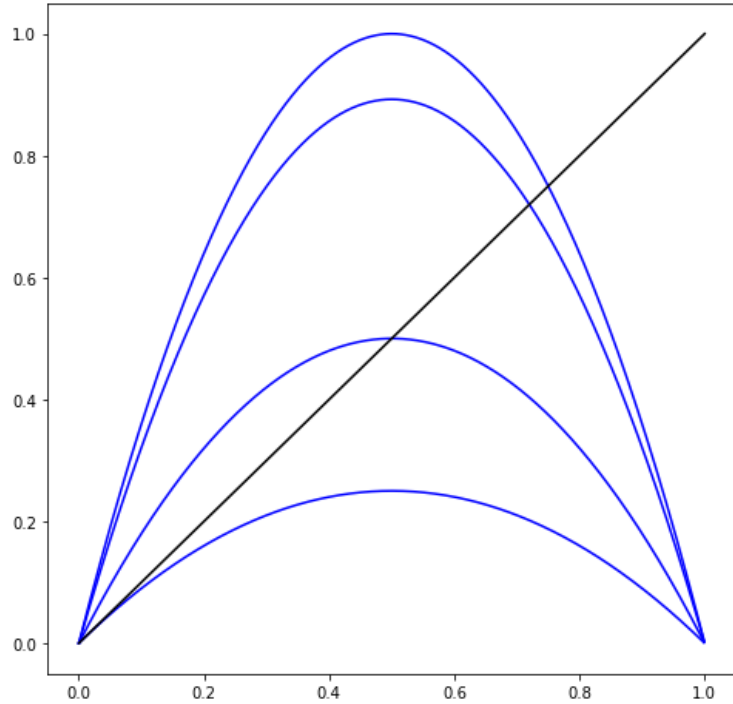
Família Logística

- $f_a(x) = ax(1 - x)$, $0 < a \leq 4$



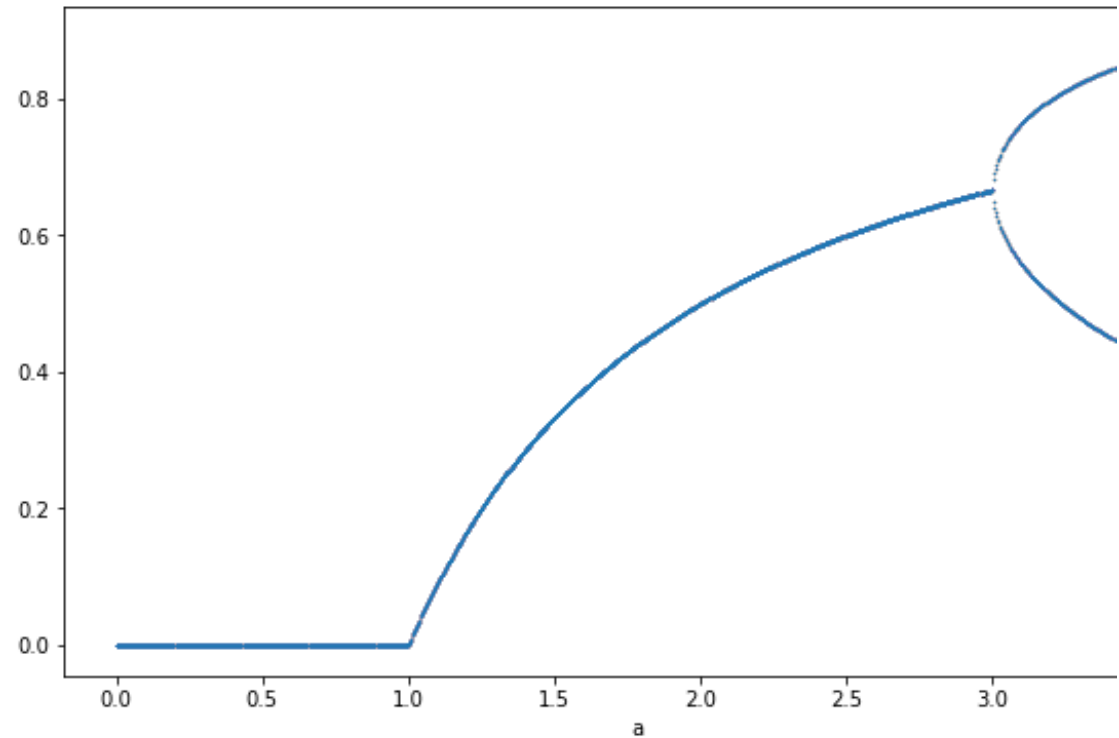
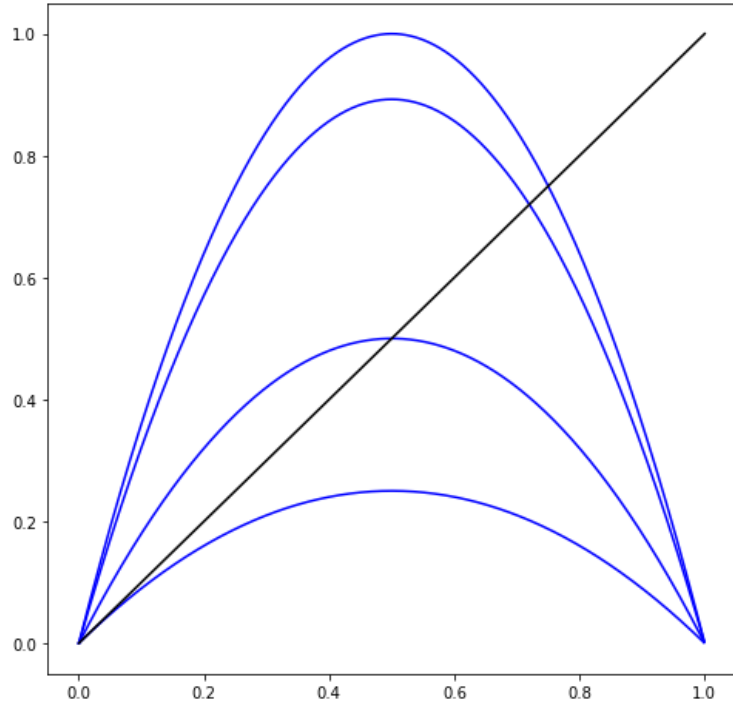
Família Logística

- $f_a(x) = ax(1 - x)$, $0 < a \leq 4$



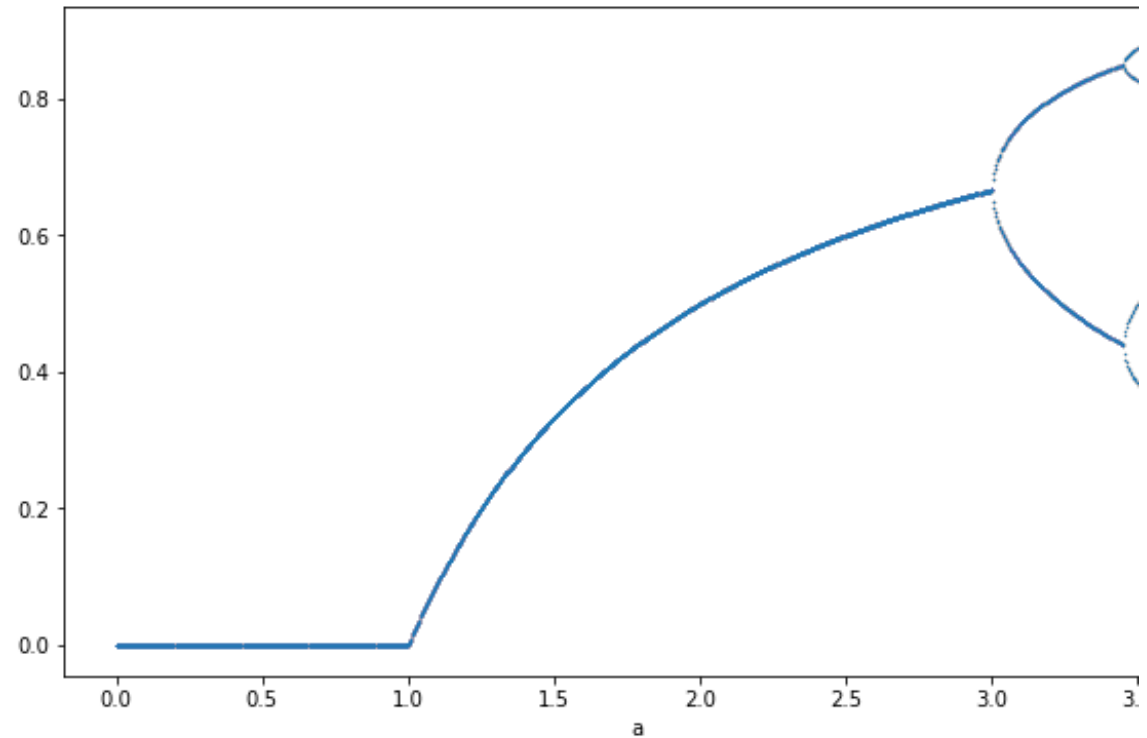
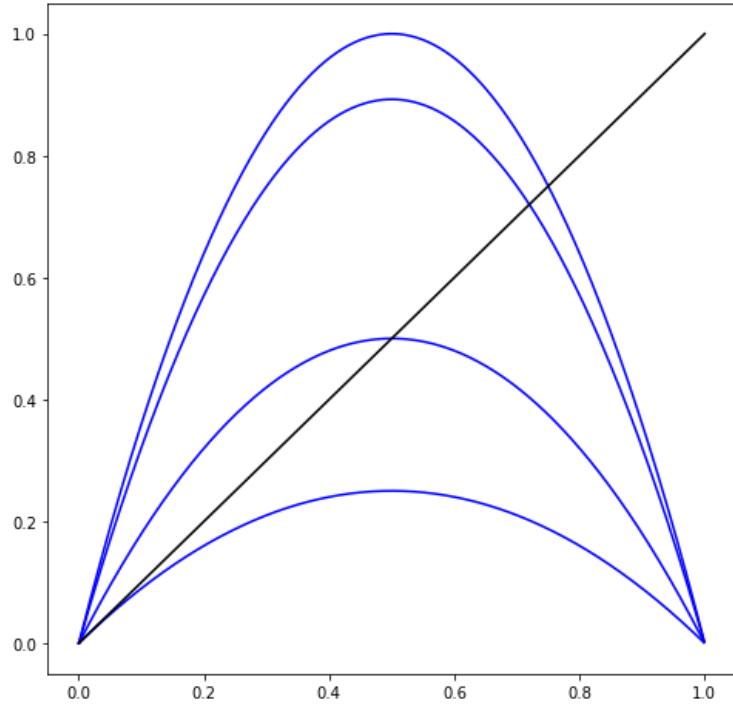
Família Logística

- $f_a(x) = ax(1 - x)$, $0 < a \leq 4$



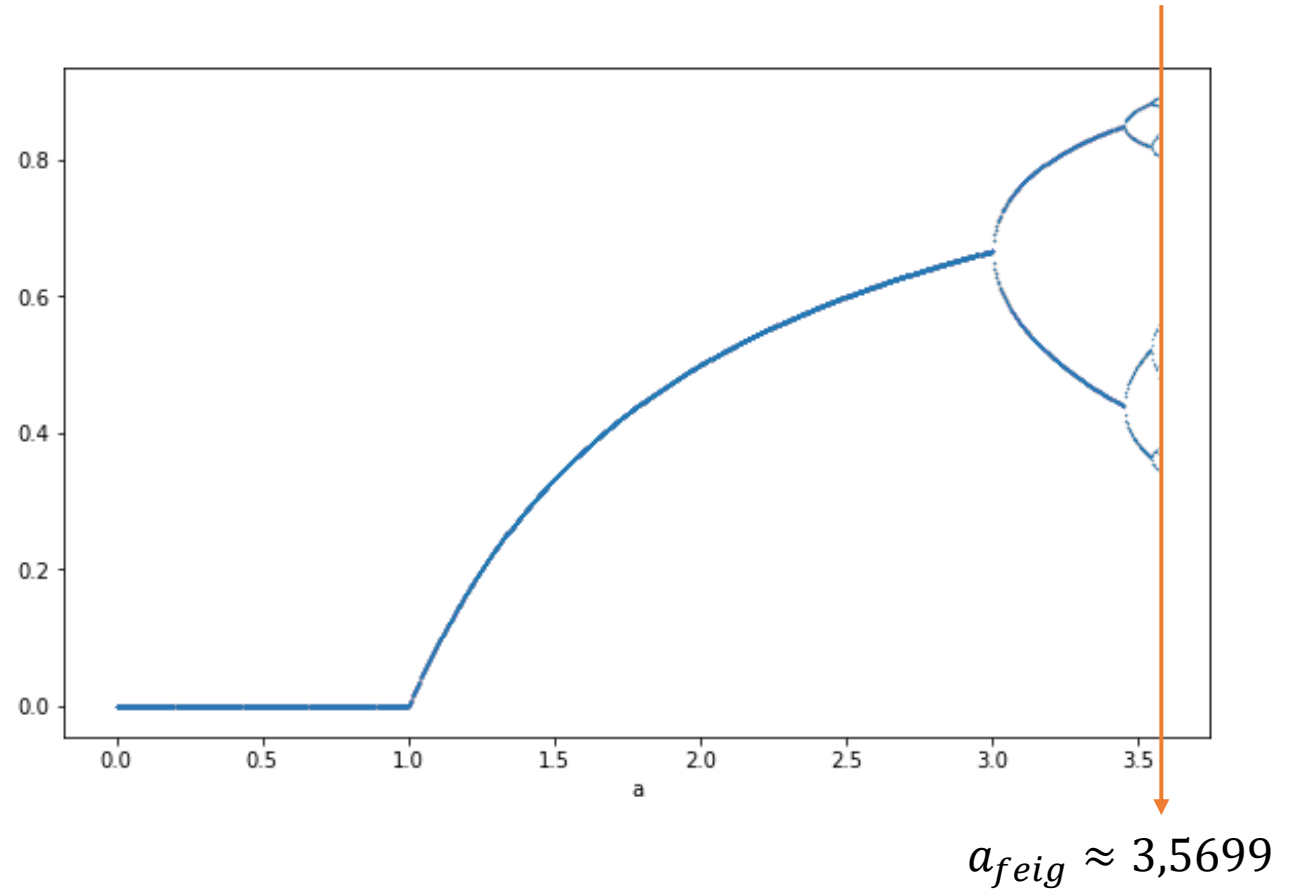
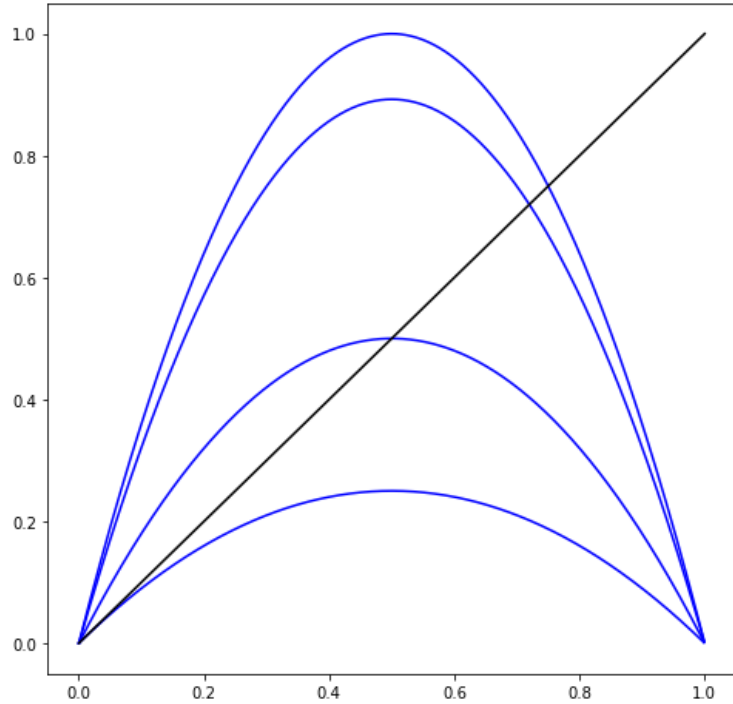
Família Logística

- $f_a(x) = ax(1 - x)$, $0 < a \leq 4$



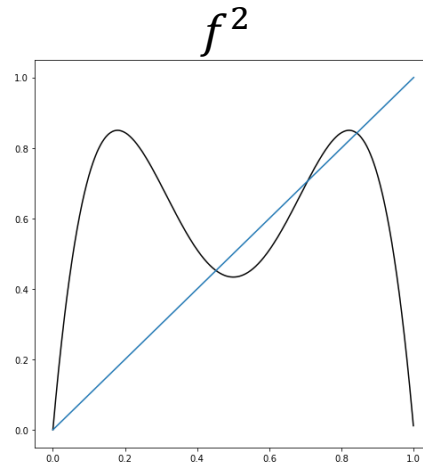
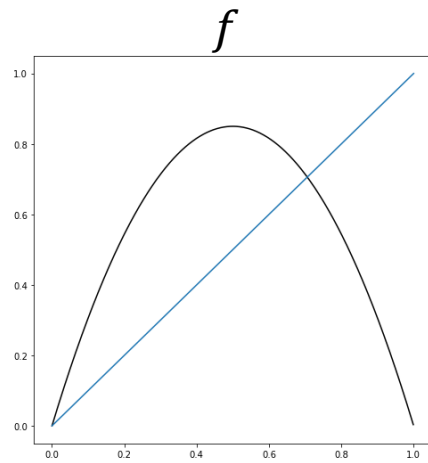
Família Logística

- $f_a(x) = ax(1 - x)$, $0 < a \leq 4$



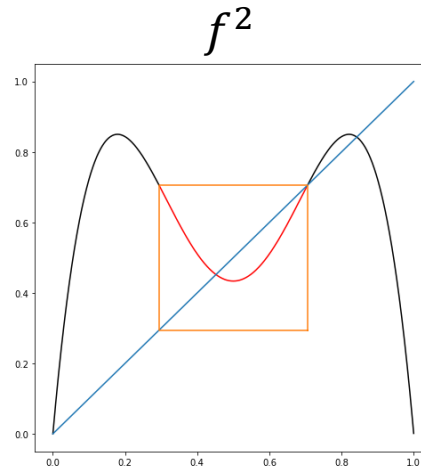
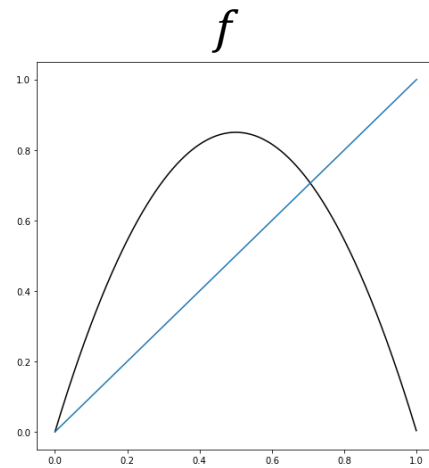
Renormalização na Família Logística

$$a = 3,4$$



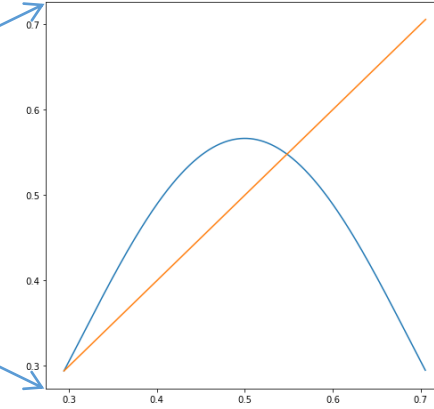
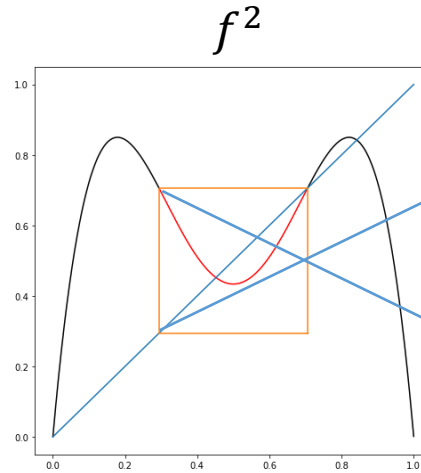
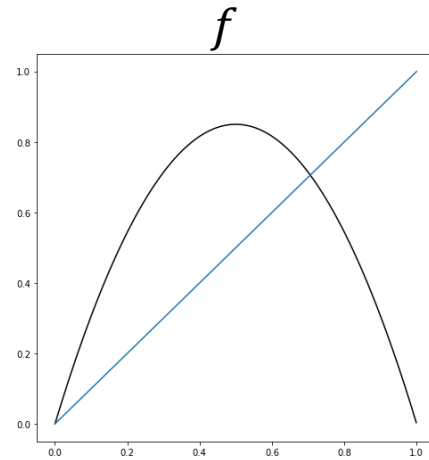
Renormalização na Família Logística

$$a = 3,4$$



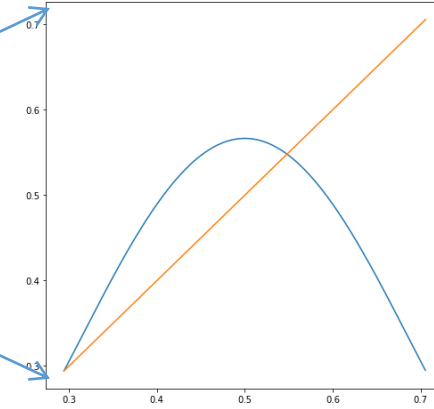
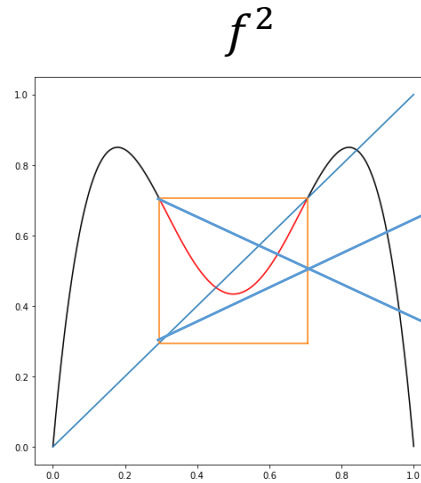
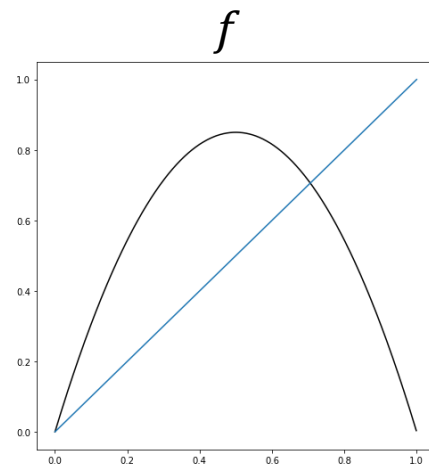
Renormalização na Família Logística

$a = 3,4$

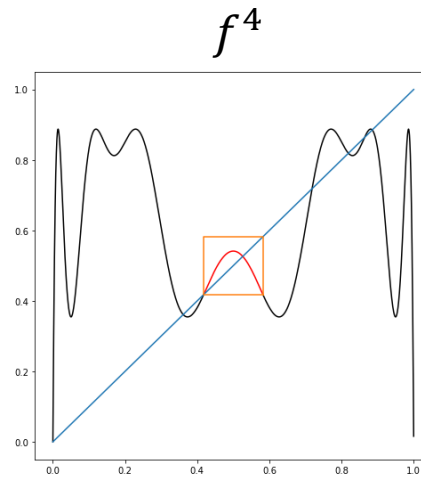
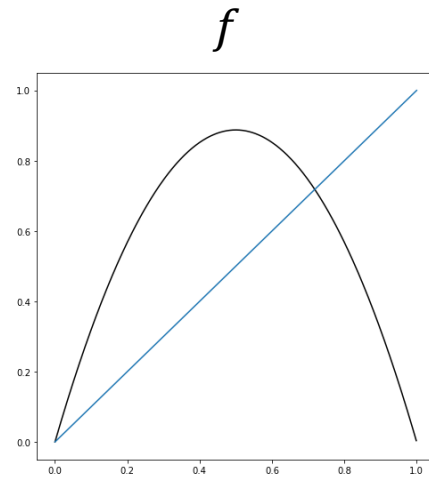


Renormalização na Família Logística

$a = 3,4$

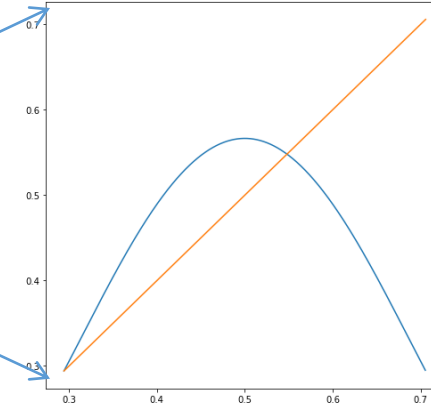
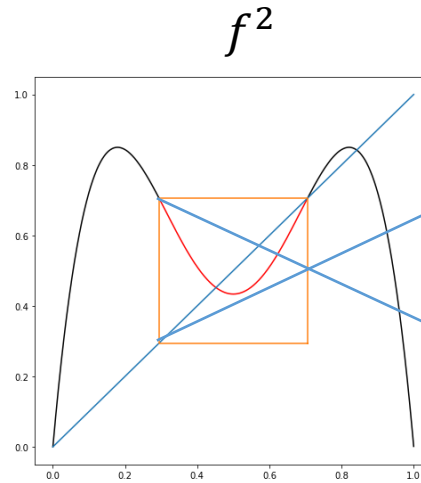
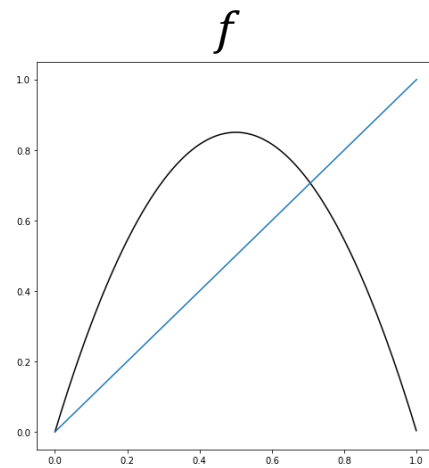


$a = 3.55$

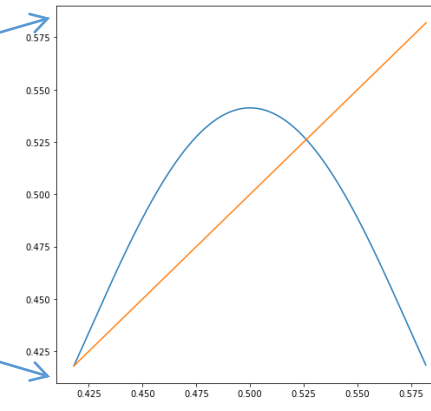
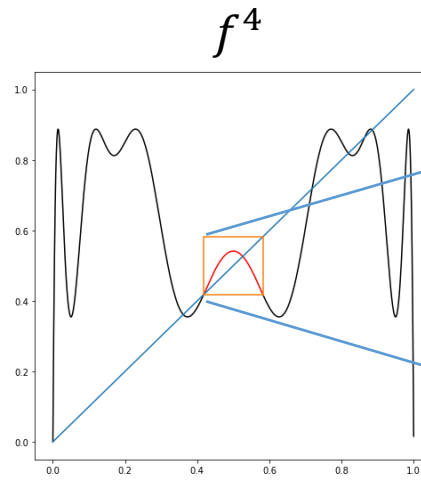
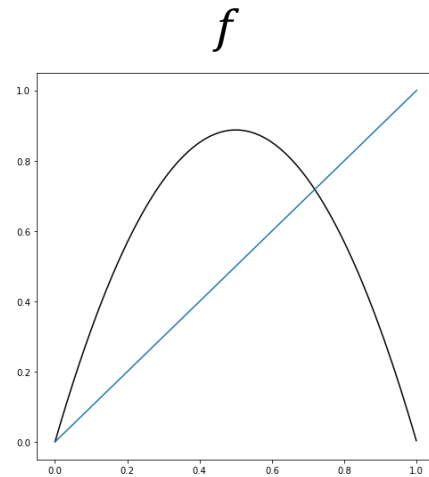


Renormalização na Família Logística

$a = 3,4$



$a = 3.55$



Mapas Renormalizáveis

Definição: Seja $f: I \rightarrow I$ unimodal. Um intervalo $J \subseteq I$ é dito **k -periódico** se

- J contém o ponto crítico;
- $f^k(J) \subseteq J$ e
- $J, f(J), \dots, f^{k-1}(J)$ têm interiores dois a dois disjuntos.

Se f possui um intervalo k -periódico, é dita **renormalizável**.

Nesse caso, tomamos k mínimo e Δ intervalo k -periódico maximal e definimos

$$\mathcal{R}f = \varphi f^k \varphi^{-1}$$

onde $\varphi: \Delta \rightarrow I$ é linear afim e sobrejetora.

Mapas Renormalizáveis

Obs: $\mathcal{R}f: I \rightarrow I$ é novamente unimodal.

Definição: Dizemos que $f: I \rightarrow I$ é **infinitamente renormalizável** se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}^n f$ está bem definido e é renormalizável.

Equivalentemente, f possui uma cadeia de intervalos periódicos Δ_n , com períodos estritamente crescentes e múltiplos do anterior.

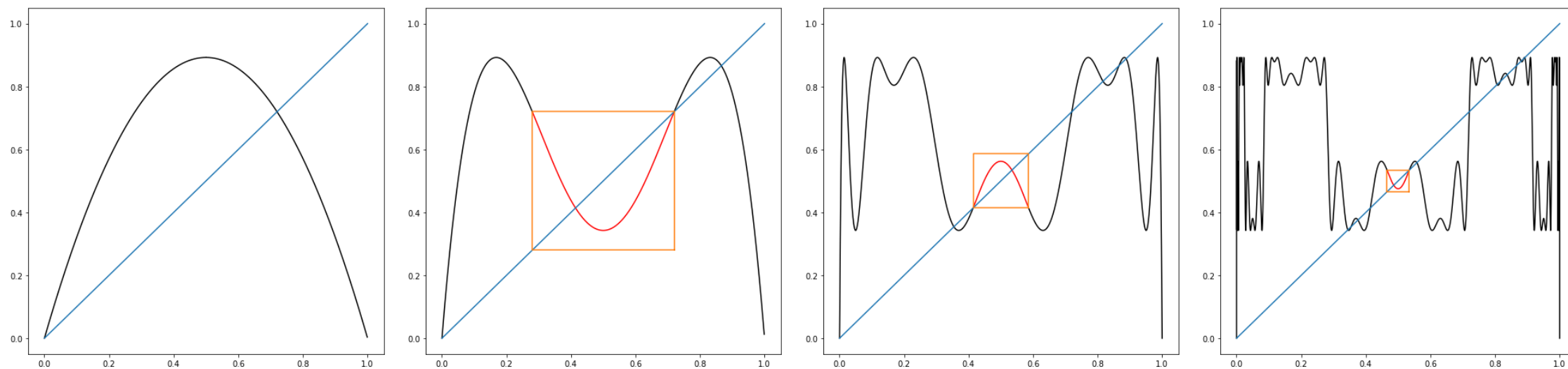
Mapas Renormalizáveis

Obs: $\mathcal{R}f: I \rightarrow I$ é novamente unimodal.

Definição: Dizemos que $f: I \rightarrow I$ é **infinitamente renormalizável** se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}^n f$ está bem definido e é renormalizável.

Equivalentemente, f possui uma cadeia de intervalos periódicos Δ_n , com períodos estritamente crescentes e múltiplos do anterior.

Exemplo: $f(x) = a_{f_{eig}} x(1 - x)$

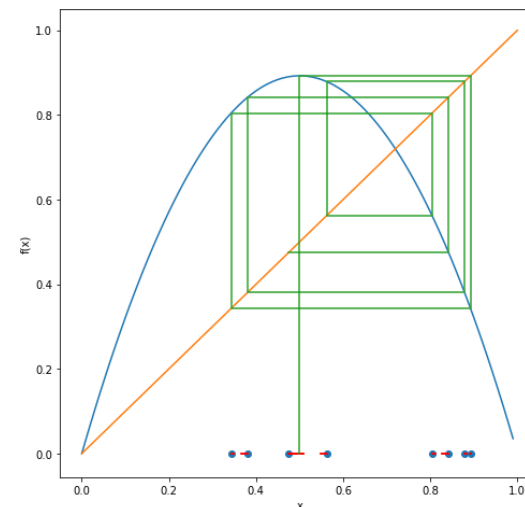
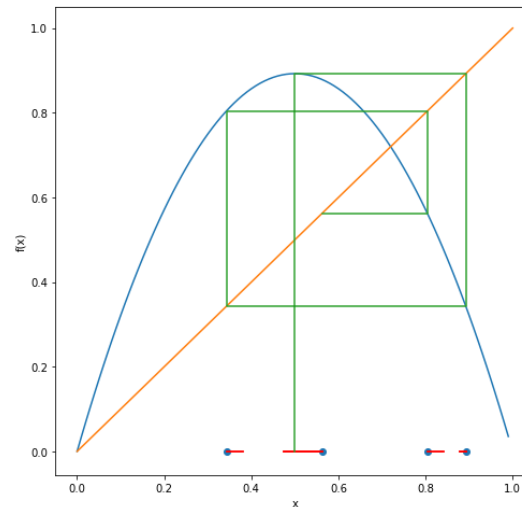
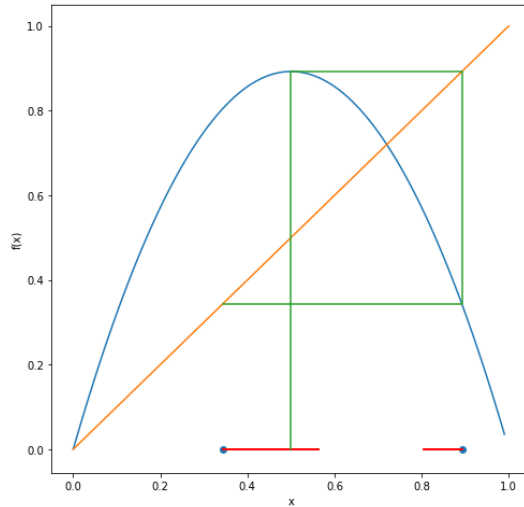


Resultado Principal

Teorema: Seja $f \in \mathcal{A}$ (a definir) infinitamente renormalizável. Seja $q(n)$ o período do intervalo da n -ésima renormalização e $J_n = [f^{q(n)}(c), f^{2q(n)}(c)]$. Defina $F_n = \bigcup_{i=0}^{q(n)-1} f^i(J_n)$ e $C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

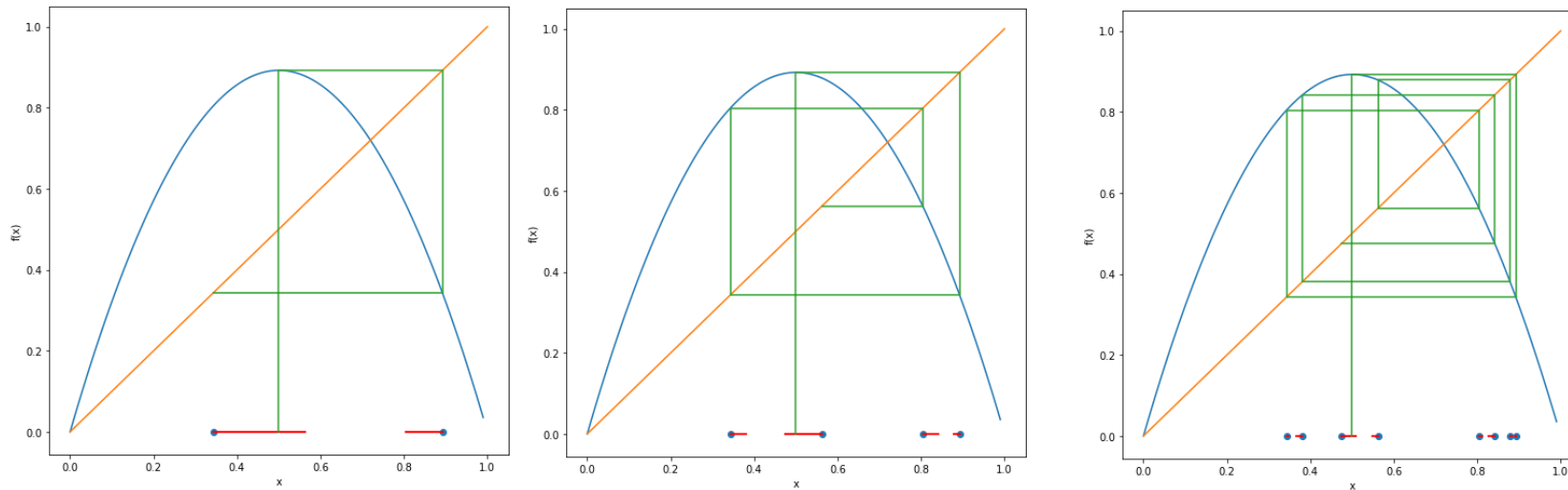
Resultado Principal

Teorema: Seja $f \in \mathcal{A}$ (a definir) infinitamente renormalizável. Seja $q(n)$ o período do intervalo da n -ésima renormalização e $J_n = [f^{q(n)}(c), f^{2q(n)}(c)]$. Defina $F_n = \bigcup_{i=0}^{q(n)-1} f^i(J_n)$ e $C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.



Resultado Principal

Teorema: Seja $f \in \mathcal{A}$ (a definir) infinitamente renormalizável. Seja $q(n)$ o período do intervalo da n -ésima renormalização e $J_n = [f^{q(n)}(c), f^{2q(n)}(c)]$. Defina $F_n = \bigcup_{i=0}^{q(n)-1} f^i(J_n)$ e $C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.



- $C(f)$ é um conjunto de Cantor;
- $C(f) = cl\{f^n(c_0): n \in \mathbb{N}\}$ e
- $C(f)$ atrai uma intersecção enumerável de abertos densos.

Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

- Derivada Schwarziana:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

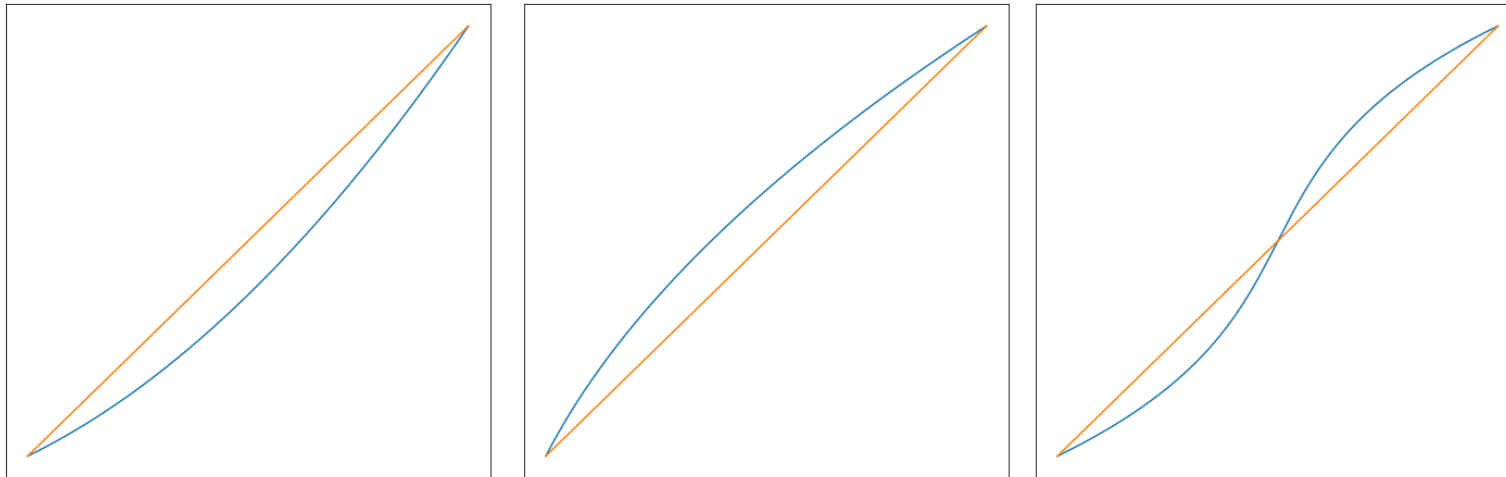
Dizemos que $f \in \mathcal{C}^3$ tem Derivada Schwarziana negativa se $Sf(x) < 0, \forall x$ tal que $f'(x) \neq 0$.

Exemplos e Propriedades:

- Polinômios de grau 2;
- Polinômios de grau n com n raízes reais distintas;
- É uma propriedade aberta em $\mathcal{C}^3$;
- A propriedade é preservada por composição de funções.
- Se f' não se anula num intervalo, o mínimo de $|f'|$ é atingido na fronteira

Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

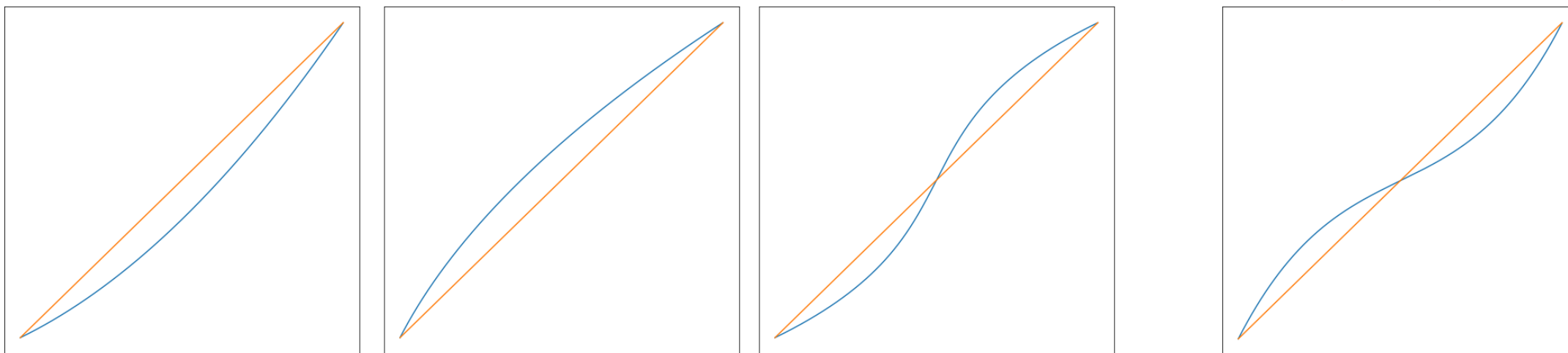
Consequência: Se $Sf < 0$ e f possui uma órbita periódica atratora, então ela atrai o ponto crítico ou um ponto de extremidade.



Possibilidades para um homeomorfismo crescente com derivada Schwarziana negativa

Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência: Se $Sf < 0$ e f possui uma órbita periódica atratora, então ela atrai o ponto crítico ou um ponto de extremidade.



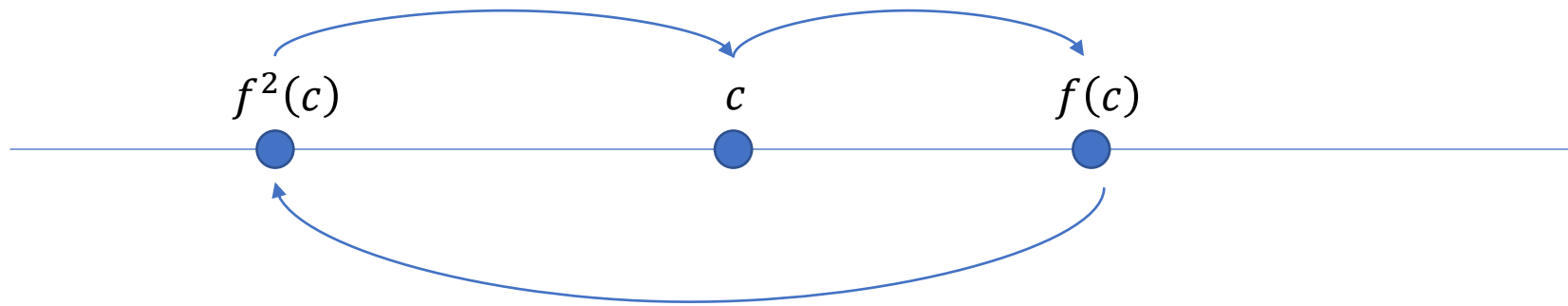
Possibilidades para um homeomorfismo crescente com derivada Schwarziana negativa

Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência para ∞ -renormalizáveis: Não existem atratores periódicos, pois c seria periódico.

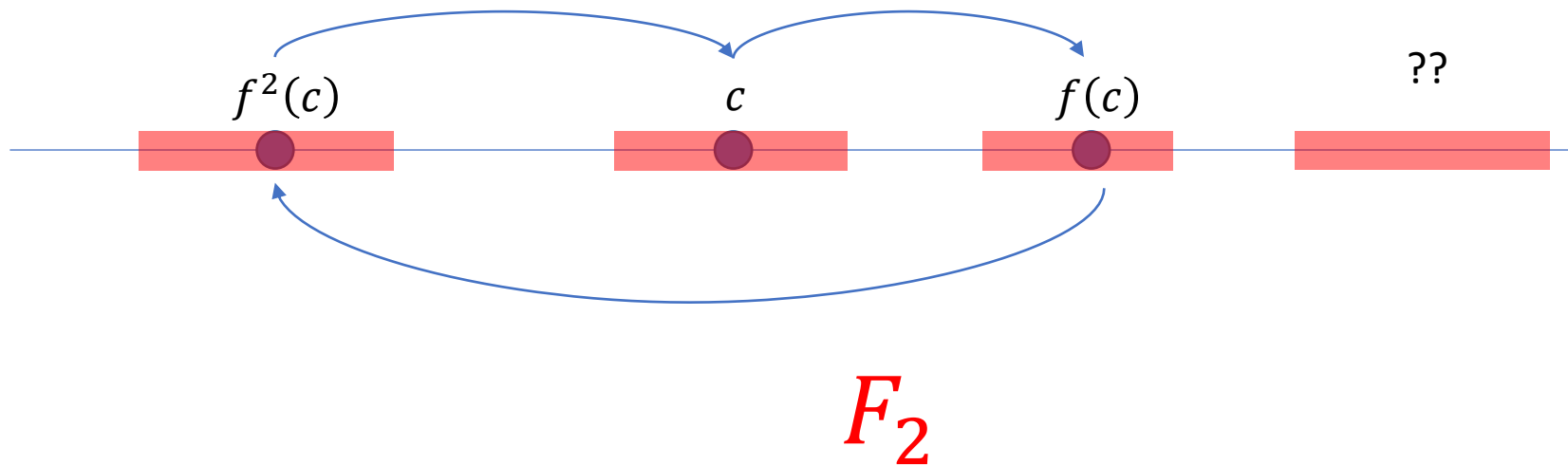
Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência para ∞ -renormalizáveis: Não existem atratores periódicos, pois c seria periódico.



Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência para ∞ -renormalizáveis: Não existem atratores periódicos, pois c seria periódico.



Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

- Ponto crítico non-flat: Seja c um ponto crítico de f . Dizemos que c é non-flat se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(c + t)}{t^{n+1}} \neq 0$$

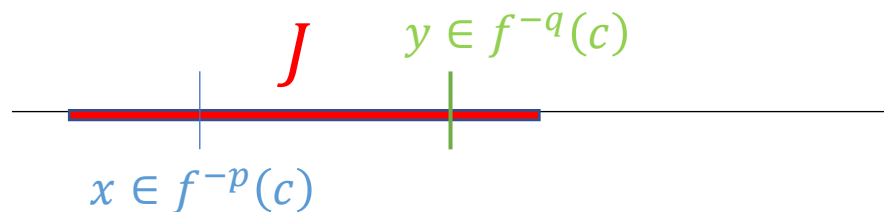
Exemplos e Propriedades:

- Se a derivada de alguma ordem não se anula em c , então c é non-flat;
- Em particular, a propriedade é satisfeita para qualquer mapa unimodal real-analítico.
- Se c é non-flat, então $Sf < 0$ localmente;
- Se $f: I \rightarrow I$ é unimodal com ponto crítico non-flat e sem atratores periódicos, então a órbita passada de c é densa em I .

Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência para ∞ -renormalizáveis: Toda cadeia decrescente J_n , onde J_n é alguma componente conexa de F_n tem intersecção unitária.

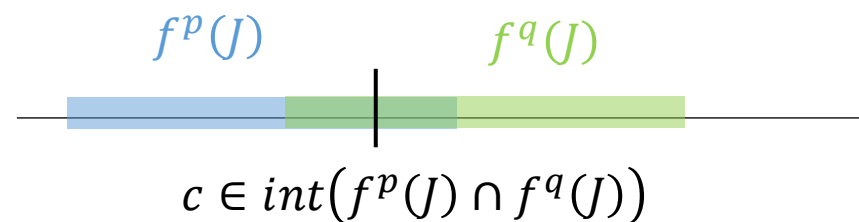
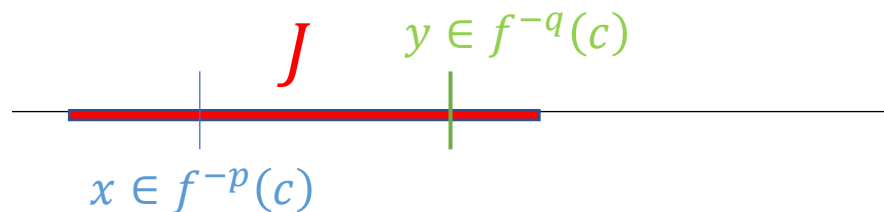
Caso contrário, o “tempo de retorno” de $J = \bigcap_n J_n$ e suas iteradas seria infinito, com $\text{int}(J) \neq \emptyset$.



Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência para ∞ -renormalizáveis: Toda cadeia decrescente J_n , onde J_n é alguma componente conexa de F_n tem intersecção unitária.

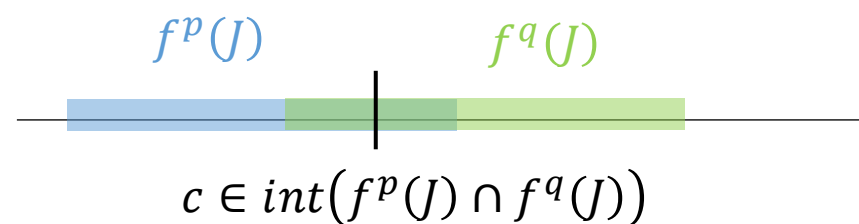
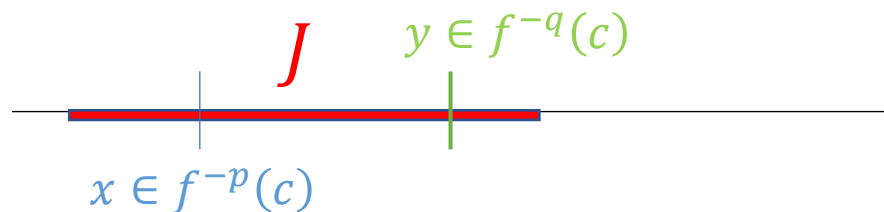
Caso contrário, o “tempo de retorno” de $J = \bigcap_n J_n$ e suas iteradas seria infinito, com $\text{int}(J) \neq \emptyset$.



Hipóteses (definindo a classe $\mathcal{A}$)

Consequência para ∞ -renormalizáveis: Toda cadeia decrescente J_n , onde J_n é alguma componente conexa de F_n tem intersecção unitária.

Caso contrário, o “tempo de retorno” de $J = \bigcap_n J_n$ e suas iteradas seria infinito, com $\text{int}(J) \neq \emptyset$.



$$\mathcal{A} = \{f: I \rightarrow I \text{ unimodal, } Sf < 0 \text{ com ponto crítico non-flat}\}$$

A Bacia de $\mathcal{C}(f)$

$\mathcal{C}(f)$ atrai uma intersecção enumerável de abertos densos:

Fixe n . Quem entra em Δ_n ?

$$\bigcup_k f^{-k}(\text{int}(\Delta_n))$$

A Bacia de $\mathcal{C}(f)$

$\mathcal{C}(f)$ atrai uma intersecção enumerável de abertos densos:

Fixe n . Quem entra em Δ_n ?

$\bigcup_k f^{-k}(\text{int}(\Delta_n))$ é denso e aberto

A Bacia de $\mathcal{C}(f)$

$\mathcal{C}(f)$ atrai uma intersecção enumerável de abertos densos:

Fixe n . Quem entra em Δ_n ?

$\bigcup_k f^{-k}(\text{int}(\Delta_n))$ é denso e aberto

Se uma órbita entra em todo Δ_n , então acumula em c e, consequentemente, em $\mathcal{C}(f)$.

Logo, $\mathcal{C}(f)$ atrai $\bigcap_n \bigcup_k f^{-k}(\Delta_n)$

Outros Tópicos Relacionados

- A Bacia de $\mathcal{C}(f)$ tem medida completa;
- Dinâmica Simbólica em $\mathcal{C}(f)$;
- Extensão dos resultados para uma grande classe de mapas $\mathcal{C}^2$;
- Equivalência Combinatória $\Rightarrow$ Equivalência Topológica;
- Dinâmica do Operador $\mathcal{R}$.

Referências

- [1] Guckenheimer, John. **Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps.** Communications in Mathematical Physics 70.2 (1979): 133-160.
- [2] Singer, David. **Stable orbits and bifurcation of maps of the interval.** SIAM Journal on Applied Mathematics 35.2 (1978): 260-267.
- [3] de Melo, W. & van Strien, S. **One-Dimensional Dynamics.** Springer - Verlag, 1993.
- [4] Feigenbaum, M.: **Quantitative universality for a class of nonlinear transformations.** J. Stat. Phys. 19, (1978), 25 - 52.
- [5] Couillet, Pierre, and Charles Tresser. **Iterations d'endomorphismes et groupe de renormalisation.** Le Journal de Physique Colloques 39.C5 (1978): C5-25.
- [6] Milnor, John, and William Thurston. **On iterated maps of the interval.** Dynamical systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 1988. 465-563.
- [7] Jiang, Yunping. **Renormalization and Geometry in One-Dimensional and Complex Dynamics,** World Scientific, Vol 10, 1996.
- [8] Milnor, John. **On the concept of attractor.** The theory of chaotic attractors. Springer, New York, NY, 1985. 243-264.
- [9] May, Robert M. **Simple mathematical models with very complicated dynamics.** Nature 261.5560 (1976): 459-467.